CADEIAS DE MARKOV - TRABALHO 1

Yasmin Roberta Fernandes - GRR20137523

4 de abril de 2019

1.Suponha que a profissão de um homem pode ser classificada como profissional, trabalhador qualificado ou operário não qualificado. Suponha que, dos filhos de homens profissionais, 80 por cento são profissionais, 10 porcento são trabalhadores qualificados e 10 por cento são trabalhadores não qualificados. No caso dos filhos de operários especializados, 60 porcento são hábeis trabalhadores qualificados, 20 porcento são profissionais e 20 porcento são trabalhadores não qualificados. Finalmente, no caso de trabalhadores não qualificados, 50 porcento dos filhos são trabalhadores não qualificados e 25 porcento em cada um são as chances das outras duas categorias. Suponha que cada homem tem pelo menos um filho e que seguindo a profissão de um filho escolhido aleatoriamente de uma determinada família através de várias gerações temos definida uma Cadeia de Markov. Configure a matriz de probabilidades de transição. Encontre a probabilidade de que um neto escolhido aleatoriamente de um trabalhador não qualificado seja um homem profissional.

library(markovchain)

## Package: markovchain  
## Version: 0.8.5  
## Date: 2020-05-21  
## BugReport: http://github.com/spedygiorgio/markovchain/issues

estados = c("Profissionais","Qualificados","Não Qualificados")  
Prob.T=matrix(c(0.8,0.1,0.1,0.6,0.2,0.2,0.5,0.25,0.25),nrow=3,  
 ncol=3,byrow=T, dimnames=list(estados,estados))  
ProbT = new("markovchain", states=estados, transitionMatrix=Prob.T,  
 name="Classificação de profissão de um homem")  
ProbT

## Classificação de profissão de um homem   
## A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
## Profissionais, Qualificados, Não Qualificados   
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
## Profissionais Qualificados Não Qualificados  
## Profissionais 0.8 0.10 0.10  
## Qualificados 0.6 0.20 0.20  
## Não Qualificados 0.5 0.25 0.25

Probabilidade dos netos a partir da matriz de transição atingirem o estado da classificação:

ProbT^2

## Classificação de profissão de um homem^2   
## A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
## Profissionais, Qualificados, Não Qualificados   
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
## Profissionais Qualificados Não Qualificados  
## Profissionais 0.750 0.1250 0.1250  
## Qualificados 0.700 0.1500 0.1500  
## Não Qualificados 0.675 0.1625 0.1625

Neste caso conforme solicitado no exercício temos que o neto de um neto de um trabalhador não qualificado se tornar também um trabalhador não qualificado e de aproximadamente 37,5%.

2.Seja { : } uma Cadeia de Markov. Mostre que

Para essa demonstração, vou utilizar outra notação, será provado que:

Ou seja, se dado o estado atual, os estados passados nÃO tem influencia sobre o futuro.

1. Uma Cadeia de Markov a três estados tem a seguinte matriz de probabilidades de transição:

a)Qual é o valor aproximado de (1001,3) ? Que interpretação você dá a esse resultado?

estados3 = c("1","2","3")  
Prob.T3=matrix(c(0.4,0.5,0.1,0.4,0.5,0.1,0.4,0.5,0.1),nrow=3,  
 ncol=3,byrow=T, dimnames=list(estados3,estados3))  
Prob.T3 = new("markovchain", states=estados3, transitionMatrix=Prob.T3,  
 name="MATRIZ DE TRANSIÇÃO")  
aj <- c(1,0,0)  
valoraprox <- aj\*(Prob.T3^100)  
valoraprox

## 1 2 3  
## [1,] 0.4 0.5 0.1

Neste caso observamos que a probabilidade de estarmos no estado 3 após a centésima interação partindo de 1 e de 10%, definida pela matriz estacionária. A potência da matriz de probabilidades em transição de um estado para outro é dada pelo expoente, logo a probabilidade de ir do estado um para o três em 100 transições é dada por essa matriz.

1. Qual é a probabilidade de que após o terceiro passo a cadeia esteja no estado 3 se o vector de probabilidades inicial é (1/3, 1/3, 1/3)?

pb <- rep(1/3 , 3)  
passo3 <- pb\*(Prob.T3^3)  
passo3

## 1 2 3  
## [1,] 0.4 0.5 0.1

mean(passo3[,3])

## [1] 0.1

Encontramos a probabilidade de aproximadamente 0,1

4.Considere como espaço de estados S = {0, 1, … , 6} de uma Cadeia de Markov com matriz de transição

estados4 = c("0", "1" , "2" , "3" , "4" , "5" , "6")  
prob.T4 = matrix (c(1/2,0,1/8,1/4,1/8,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/2,0,1/2,0,0,0,0,1/2,1/2,0,0,0,0,0,0,1/2,1/2),  
 nrow=7, ncol=7, byrow=T,  
 dimnames=list(estados4,estados4))  
prob.T4 = new ("markovchain", states=estados4, transitionMatrix=prob.T4, name="Cadeia de Markoviana")  
  
prob.T4

## Cadeia de Markoviana   
## A 7 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
## 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6   
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
## 0 1 2 3 4 5 6  
## 0 0.5 0 0.125 0.25 0.125 0.0 0.0  
## 1 0.0 0 1.000 0.00 0.000 0.0 0.0  
## 2 0.0 0 0.000 1.00 0.000 0.0 0.0  
## 3 0.0 1 0.000 0.00 0.000 0.0 0.0  
## 4 0.0 0 0.000 0.00 0.500 0.0 0.5  
## 5 0.0 0 0.000 0.00 0.500 0.5 0.0  
## 6 0.0 0 0.000 0.00 0.000 0.5 0.5

a)Determine quais estados sÃ£o transientes e quais recorrentes

transientStates(prob.T4)

## [1] "0"

steadyStates(prob.T4)

## 0 1 2 3 4 5 6  
## [1,] 0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.3333333 0.3333333 0.3333333  
## [2,] 0 0.3333333 0.3333333 0.3333333 0.0000000 0.0000000 0.0000000

Observamos que os estados de 1 a 6 são recorrentes, restando apenas o estado 0 como trasiente

b)Encontre para y=0,…,6.

is.accessible(object = prob.T4, from = "0", to = "0")

## [1] TRUE

is.accessible(object = prob.T4, from = "0", to = "1")

## [1] TRUE

is.accessible(object = prob.T4, from = "0", to = "2")

## [1] TRUE

is.accessible(object = prob.T4, from = "0", to = "3")

## [1] TRUE

is.accessible(object = prob.T4, from = "0", to = "4")

## [1] TRUE

is.accessible(object = prob.T4, from = "0", to = "5")

## [1] TRUE

is.accessible(object = prob.T4, from = "0", to = "6")

## [1] TRUE

firstPassage(prob.T4, 0, 6)

## 0 1 2 3 4 5 6  
## 1 0.5 0.00000 0.12500000 0.250000 0.12500000 0.0000000 0.00000000  
## 2 0.0 0.25000 0.06250000 0.250000 0.06250000 0.0000000 0.06250000  
## 3 0.0 0.25000 0.28125000 0.125000 0.03125000 0.0312500 0.06250000  
## 4 0.0 0.12500 0.14062500 0.062500 0.01562500 0.0468750 0.04687500  
## 5 0.0 0.06250 0.07031250 0.031250 0.00781250 0.0468750 0.03125000  
## 6 0.0 0.03125 0.03515625 0.015625 0.00390625 0.0390625 0.01953125

5.Num estudo com homens criminosos em Filadélfia descobriram que a probabilidade de que um tipo de ataque seja seguido por um outro tipo pode ser descrito pela seguinte matriz de transição.

estados5 = c("Outro", "Injúria" , "Roubo" , "Dano" , "Misto")  
prob.T5 = matrix (c(0.645,0.099,0.152,0.033,0.071,0.611,0.138,0.128,0.033,0.090,0.514,0.067,0.271,0.030,0.118,0.609,0.107,0.178,0.064,0.042,0.523,0.093,0.183,0.022,0.179),  
 nrow=5, ncol=5, byrow=T,  
 dimnames=list(estados5,estados5))  
prob.T5 = new ("markovchain", states=estados5, transitionMatrix=prob.T5, name="Homens Criminosos")  
  
prob.T5

## Homens Criminosos   
## A 5 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
## Outro, Injúria, Roubo, Dano, Misto   
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
## Outro Injúria Roubo Dano Misto  
## Outro 0.645 0.099 0.152 0.033 0.071  
## Injúria 0.611 0.138 0.128 0.033 0.090  
## Roubo 0.514 0.067 0.271 0.030 0.118  
## Dano 0.609 0.107 0.178 0.064 0.042  
## Misto 0.523 0.093 0.183 0.022 0.179

a)Para um criminoso que comete roubo, qual é a probabilidade que o seu próximo crime também seja um roubo?

roubou1 <- prob.T5^1  
roubo <- 0.271  
roubo

## [1] 0.271

Conforme visto na tabela acima encontramos a probabilidade de aproximadamente 27%

b)Para um criminoso que comete roubo, qual é a probabilidade de que seu segundo crime depois do atual também seja um roubo?

roubos2<- prob.T5^2  
roubos2

## Homens Criminosos^2   
## A 5 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
## Outro, Injúria, Roubo, Dano, Misto   
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
## Outro Injúria Roubo Dano Misto  
## Outro 0.611872 0.097835 0.170771 0.032786 0.086736  
## Injúria 0.611372 0.100010 0.167568 0.032649 0.088401  
## Roubo 0.591745 0.092473 0.187079 0.031819 0.096884  
## Dano 0.610616 0.097737 0.173580 0.033988 0.084079  
## Misto 0.595235 0.095873 0.177666 0.031164 0.100062

Encontramos a probabilidade de aproximadamente 19%

c)Se essas tendências continuarem, quais são as probabilidades de longo prazo para cada tipo de crime?

longoprazo <- steadyStates(prob.T5)  
longoprazo

## Outro Injúria Roubo Dano Misto  
## [1,] 0.6067869 0.09693348 0.1740085 0.0324979 0.0897732

6.Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados S={0,1,2} e matriz de probabilidades de transição a)Mostre que esta cadeia tem uma única distribuição estacionária e encontre-a.

estados6 = c("0", "1" , "2")  
prob6 = matrix (c(0.4,0.4,0.2,0.3,0.4,0.3,0.2,0.4,0.4),  
 nrow=3, ncol=3, byrow=T,  
 dimnames=list(estados6,estados6))  
prob6 = new ("markovchain", states=estados6, transitionMatrix=prob6, name="Cadeia de Markov 3")  
  
prob6

## Cadeia de Markov 3   
## A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
## 0, 1, 2   
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
## 0 1 2  
## 0 0.4 0.4 0.2  
## 1 0.3 0.4 0.3  
## 2 0.2 0.4 0.4

steadyStates(prob6)

## 0 1 2  
## [1,] 0.3 0.4 0.3

Podemos observar a distribuição estacionária sendo 0,3 / 0,4 / 0,3 para os estados 1 / 2 / 3 respectivamente.

7.Considere uma Cadeia de Markov sendo S={0,1,2,3,4} o espaço de estados e com matriz de probabilidades de transição

estados7 = c("0", "1" , "2" , "3" , "4")  
prob7 = matrix (c(0,1/3,2/3,0,0,0,0,0,1/4,3/4,0,0,0,1/4,3/4,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0),  
 nrow=5, ncol=5, byrow=T,  
 dimnames=list(estados7,estados7))  
prob7 = new ("markovchain", states=estados7, transitionMatrix=prob7, name="Matriz de Transição VII")  
  
prob7

## Matriz de Transição VII   
## A 5 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
## 0, 1, 2, 3, 4   
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
## 0 1 2 3 4  
## 0 0 0.3333333 0.6666667 0.00 0.00  
## 1 0 0.0000000 0.0000000 0.25 0.75  
## 2 0 0.0000000 0.0000000 0.25 0.75  
## 3 1 0.0000000 0.0000000 0.00 0.00  
## 4 1 0.0000000 0.0000000 0.00 0.00

a)Mostre que esta é uma cadeia irredutível

## [1] TRUE

## Matriz de Transição VII   
## A 5 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:   
## 0, 1, 2, 3, 4   
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:   
## 0 1 2 3 4  
## 0 0 0.3333333 0.6666667 0.00 0.00  
## 1 0 0.0000000 0.0000000 0.25 0.75  
## 2 0 0.0000000 0.0000000 0.25 0.75  
## 3 1 0.0000000 0.0000000 0.00 0.00  
## 4 1 0.0000000 0.0000000 0.00 0.00

b)Encontre o período

## [1] 3

c)Encontre a distribuição estacionária

## 0 1 2 3 4  
## [1,] 0.3333333 0.1111111 0.2222222 0.08333333 0.25